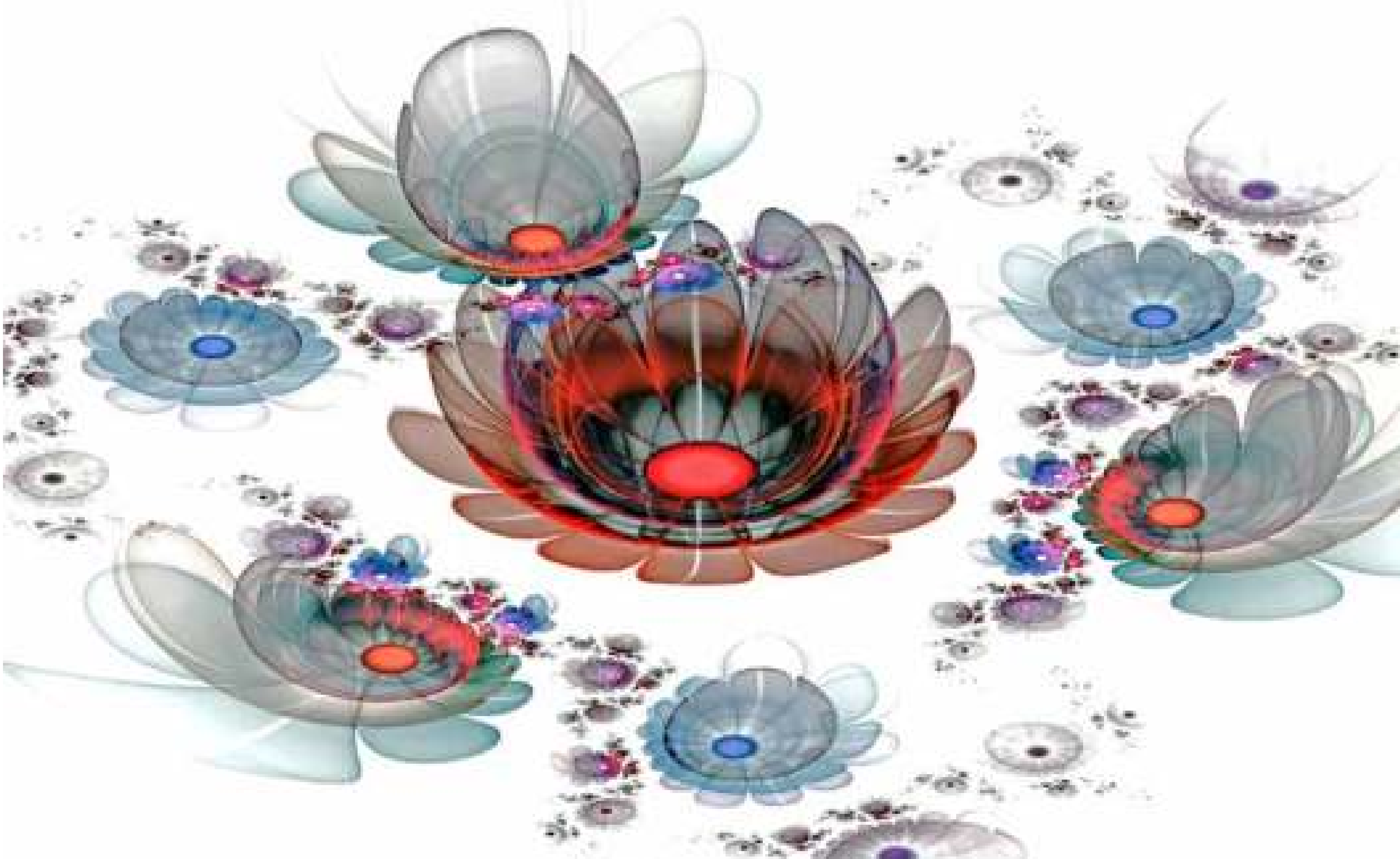
Promath
Editions

FORMULARIO DI MATEMATICA

per la maturità professionale

SESTA EDIZIONE



Jean-Pierre Favre

Algebra

Introduzione

Alfabeto Greco

Minuscola	Maiuscola	Nome
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ	Θ	theta
ι	I	iota
$\varkappa$	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu

Minuscola	Maiuscola	Nome
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
Π	Π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

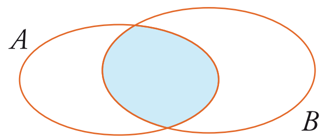
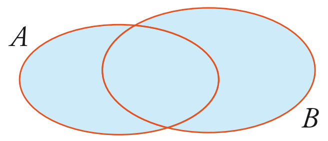
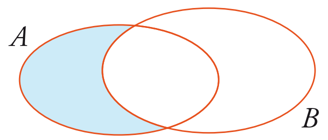
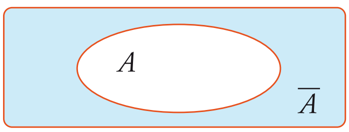
Insiemi ed Intervalli

- $x \in A$ significa che x appartiene all'insieme A
- $A \subset B$ significa che A è incluso in B

Insiemi numerici

Numeri naturali	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
Numeri interi relativi	$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$
Numeri razionali	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\right\}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$
Numeri reali	$\mathbb{R}$

Diagrammi di Venn

	Intersezione	
	$A \cap B$	A e B
	Unione	
	$A \cup B$	A o B
	Differenza	
	$A \setminus B$	A non B
	Complementare	
	$\overline{A}$	non A

Intervalli

- Intervallo chiuso $[\,a\,;\,b\,]$ $a \leq x \leq b$
- Intervallo aperto $]\,a\,;\,b\,[$ $a < x < b$
- Intervallo semi-aperto $[\,a\,;\,+\infty\,[$ $x \geq a$
- Intervallo semi-aperto $]\,-\infty\,;\,b\,]$ $x \leq b$

Calcolo letterale

Potenze e radici

$0^n = 0$	$x^0 = 1$	0^0 è indeterminato!	$1^n = 1$
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$	$\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$
$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$x^{m^n} = x^{(m^n)}$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

Notazione scientifica

Rappresentazione di un numero nella forma:

$$\pm a \times 10^n \quad \text{con } a \in [1\,;\,10[\text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

- *Esempio:* $1234 = 1{,}234 \times 10^3$

Prodotti notevoli

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^2 + b^2$ non fattorizzabile in $\mathbb{R}$ (irriducibile)
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Fattorizzazione

- Messa in evidenza: $6a - 3ab = 3a(2-b)$
- Raccoglimenti: $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + 1(x+1) = (x+1)(x^2+1)$
- Prodotti notevoli: $(x+a)^2 - 1 = (x+a-1)(x+a+1)$
- Trinomio di secondo grado: $x^2 + Sx + P = x^2 + (m+n)x + m \cdot n = (x+m)\cdot(x+n)$

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$a \geq 0$	$a < 0$
$\lvert x\rvert = a \rightarrow x = a \quad \text{o} \quad x = -a$	$\lvert x\rvert = a \rightarrow x = \varnothing$
$\lvert x\rvert \leq a \rightarrow x \leq a \quad \text{e} \quad x \geq -a$	$\lvert x\rvert \leq a \rightarrow x = \varnothing$
$\lvert x\rvert \geq a \rightarrow x \geq a \quad \text{o} \quad x \leq -a$	$\lvert x\rvert \geq a \rightarrow x = \mathbb{R}$

Distanza, tempo d'attesa tra due valori, etc... $\rightarrow$ $d(a;b) = |a-b|$

Equazioni e funzioni di primo grado

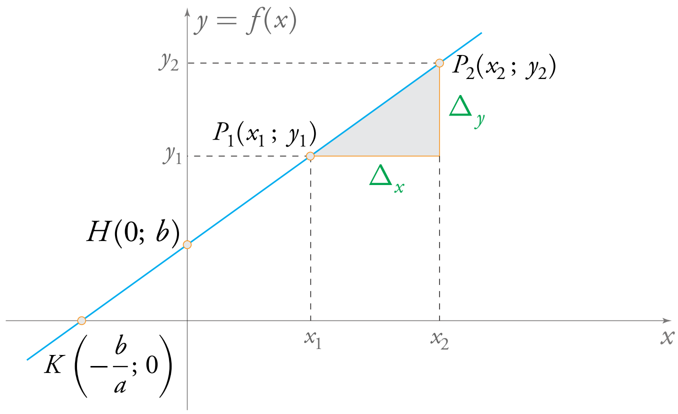
Equazioni di primo grado

$$ax + b = 0 \quad \text{con } a \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Funzioni di primo grado

$$f(x) = ax + b \quad \text{con } a \neq 0$$

- Intercetta (o ordinata all'origine): $f(0) = b \qquad \rightarrow \qquad H(0;\, b)$
- Punto di intersezione con l'asse delle ascisse: $f(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad K\left(-\frac{b}{a}\,;\, 0\right)$
- Coefficiente angolare (o pendenza della retta) f: $\quad a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Equazione di una retta passante per due punti

Dati due punti $P_1(x_1\,;\, y_1)$ e $P_2(x_2\,;\, y_2)$, risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b = y_1 \\ a \cdot x_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Rette parallele e perpendicolari

Sia: $y_1 = a_1\, x + b_1$ e $y_2 = a_2\, x + b_2$

- $y_1 \,//\, y_2 \Rightarrow a_1 = a_2$
- $y_1 \perp y_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$

Equazioni e funzioni di secondo grado

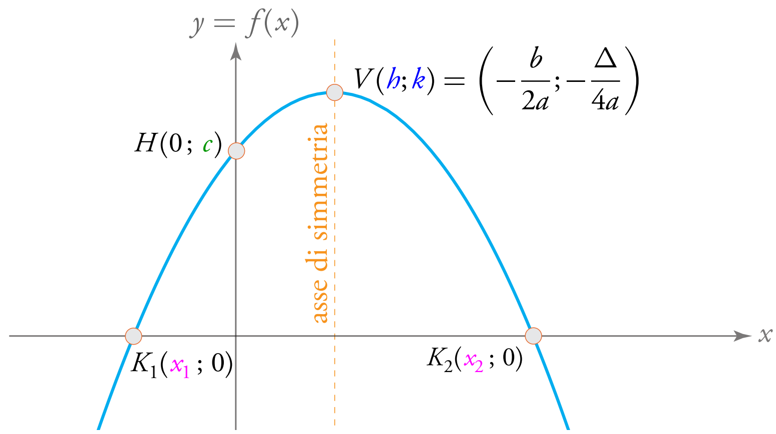
Equazioni di secondo grado

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ Calcolo del discriminante (Delta): $\Delta = b^2 - 4ac$

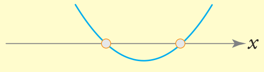
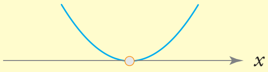
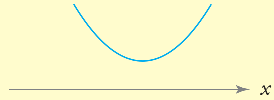
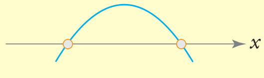
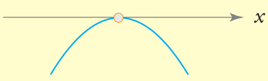
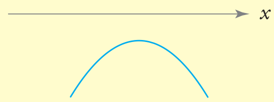
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_1 ; x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	Nessuna soluzione in $\mathbb{R}$

Funzioni di secondo grado

- Forma generale: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$
- Forma del vertice: $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$ con $a \neq 0$ e vertice $S(h ; k)$
- Forma fattorizzata: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ con $a \neq 0$ e $x_1 ; x_2$ soluzioni di $f(x) = 0$



- In immagini:

a \ Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Equazioni/funzioni esponenziali e logaritmiche

Equazioni esponenziali e logaritmiche

$y = \log_a(x) \iff x = a^y$	$(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$
$a^x = a^y \iff x = y$	$\log_a(x) = \log_a(y) \iff x = y$

- $\log(x) = \log_{10}(x)$ → calcolatrice tasto LOG
- $\ln(x) = \log_e(x)$ → calcolatrice tasto LN $(e \simeq 2{,}718)$

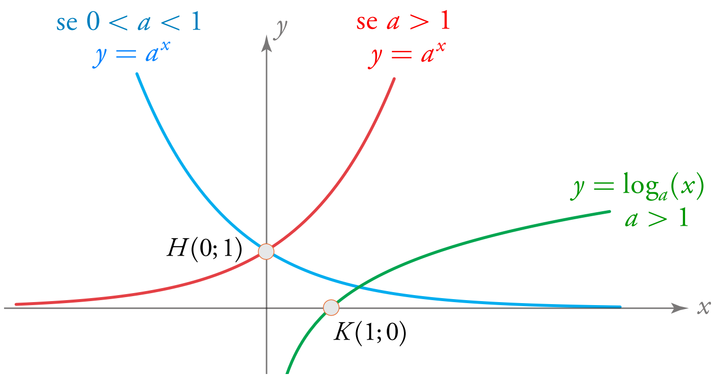
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$	$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
$\log_a(a^x) = x$	$a^{\log_a(x)} = x$
$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$

- Regola del cambiamento di base (per la calcolatrice):

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

- $f(x) = a^x$ et $g(x) = \log_a(x)$ con $a \in]0\,;\,1[\cup]1\,;\,\infty[$

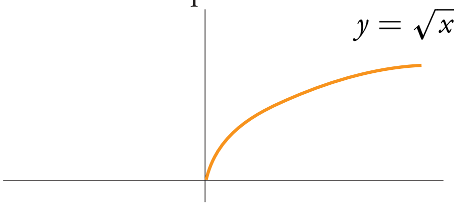


Modelli esponenziali

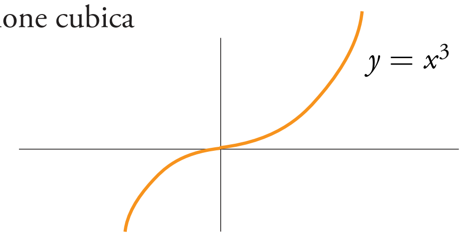
- $f(t) = a \cdot (1+b)^t$ con $\pm b$ il tasso effettivo di crescita/decrescita e a il valore iniziale
- $f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$ con $\pm\beta$ beta il tasso nominale di crescita/decrescita e α il valore iniziale

Grafico di qualche altra funzione elementare

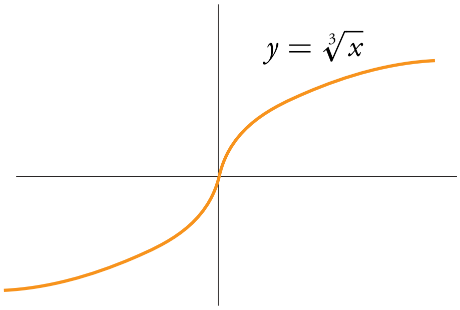
Funzione radice quadrata



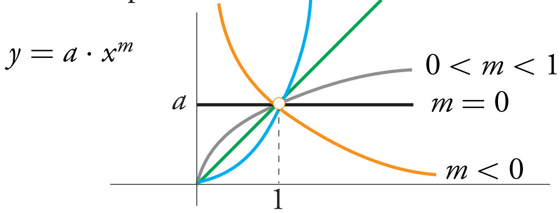
Funzione cubica



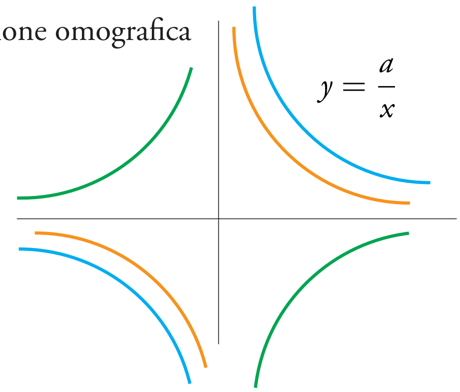
Funzione radice cubica



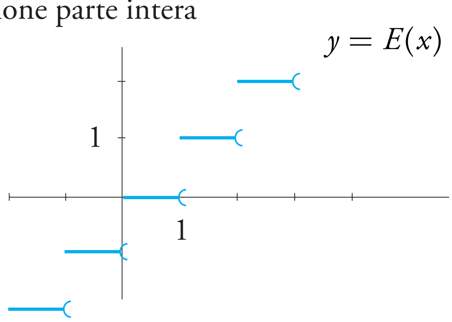
Funzione potenza



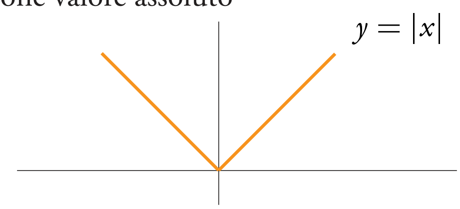
Funzione omografica



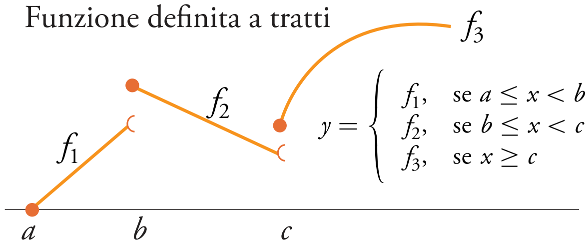
Funzione parte intera



Funzione valore assoluto



Funzione definita a tratti



Insieme di definizione

Si faccia attenzione ai seguenti casi in cui $\smiley$ = rappresenta un'espressione algebrica qualsiasi:

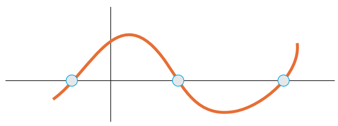
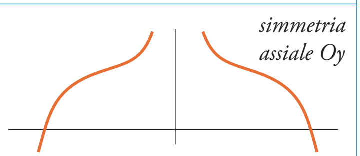
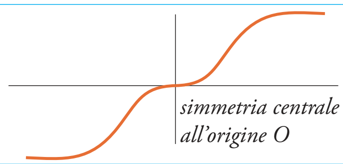
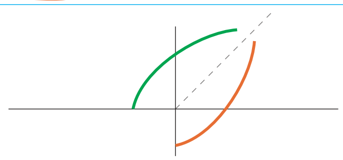
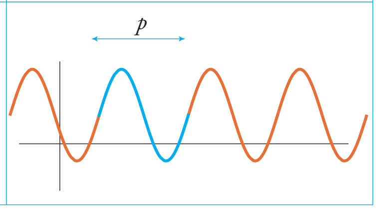
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\smiley} & \Rightarrow \quad \smiley \neq 0 \\ \sqrt[n]{\smiley} & \Rightarrow \quad \smiley \geq 0 \qquad \textit{solamente se } n \textit{ è pari} \\ \log_a(\smiley) & \Rightarrow \quad \smiley > 0 \qquad \textit{per qualsiasi base logaritmica} \end{cases}$$

Esempio: $f(x) = \dfrac{x}{2-x} + \sqrt{x+5} - \log(10-x)$

- $2 - x \neq 0 \quad \to \quad x \neq 2$ *condizione per il denominatore*
- $x + 5 \geq 0 \quad \to \quad x \geq -5$ *condizione per la radice quadrata*
- $10 - x > 0 \quad \to \quad x < 10$ *condizione per il logaritmo*

Conclusione: $x \in [-5; 2[\cup]2; 10[$

Caratteristiche di una funzione

Zeri di una funzione: valori di x tali che : $f(x) = 0$	
Funzione pari: $f(-x) = f(x)$ per ogni x nell'insieme di definizione	
Funzione dispari: $f(-x) = -f(x)$ per ogni x nell'insieme di definizione	
Funzione inversa : $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(f(x)) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ per ogni x nell'insieme di definizione	
Funzione periodica se: $f(x + k \cdot p) = f(x)$ per ogni x nell'insieme di definizione e per $k \in \mathbb{Z}$	

Analisi dei dati

Variabile statistica

Qualitativa	
Modalità	Frequenza assoluta (n_i)
Sposato/a	3
Divorziato/a	5
Celibe/Nubile	2

Quantitativa discreta	
Modalità (x_i)	n_i
3	3
4	5
5	2

Quantitativa continua		
Classe	x_i	n_i
$[2;4[$	3	4
$[4;6[$	5	12
$[6;8[$	7	4

Definizione e formule di base

- X = carattere o variabile statistica
- k = numero di modalità o di classi (qui sopra $k = 3$)
- i = classe o modalità numero i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, k$
- b_{i-1} = estremo inferiore della classe i
- b_i = estremo superiore dellla classe i
- L_i = lunghezza o ampiezza della classe i

$$L_i = b_i - b_{i-1}$$

- x_i = centro della classe i

$$x_i = \frac{b_{i-1} + b_i}{2}$$

- n_i = frequenza assoluta corrispondente alla modalità o alla classe i
- N = popolazione totale

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \qquad \text{oppure} \qquad N = \sum n_i$$

- f_i = frequenza cumulata della modalità o della classe i $\qquad f_i = n_i/N$

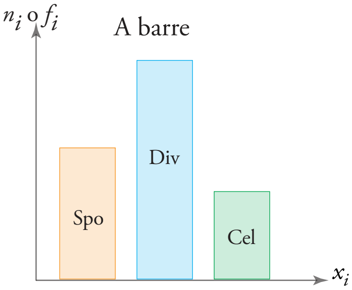
$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1 \qquad \text{oppure} \qquad \sum f_i = 1$$

- F_i = frequenza cumulata della modalità o della classe i $\qquad F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i$

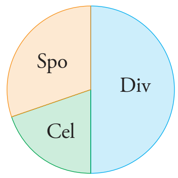
Rappresentazione grafica

- Variabile qualitativa + quantitativa discreta : diagramma

A barre

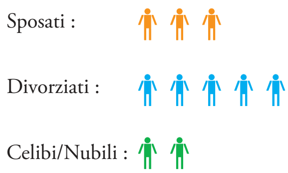


Circolare



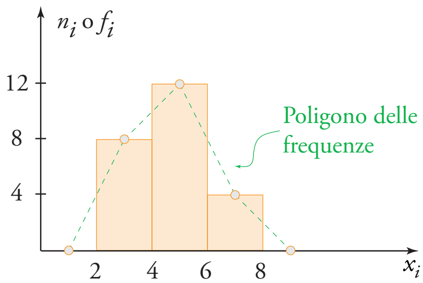
Angolo$_i$ = $f_i \times 360°$

Ideogramma

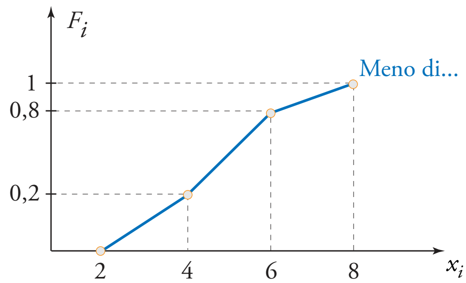


- Variabile quantitativa continua: istogramma

Istogramma



Frequenze cumulate



Utilizzo delle frequenze cumulate

F_i = Proporzione P di individui con un valore inferiore o uguale a x_i.

$$F_i = P(X \leq x_i)$$

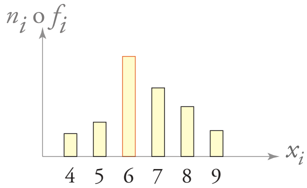
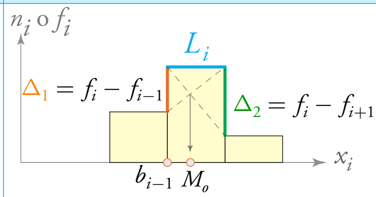
$$P(a < X \leq b) = F_b - F_a$$

Esempio (variabile continua): Proporzione di individui tra $]4;7] = F_7 - F_4$

- $F_7 = \frac{0{,}8+1}{2} = 0{,}9$ [*per interpolazione*]
- $F_4 = 0{,}2$

Quindi: $F_7 - F_4 = 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7$ Ovvero 70% degli individui

Misure di tendenza centrale e indici di posizione

Misura	Notazione	Variabile discreta	Variabile continua
Moda	M_o	 $M_o = 6$	 $M_o = b_{i-1} + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot L_i$
Mediana	M_e	Primo x_i per cui $F_i > 0,5$ Se $F_i = 0,5 \rightarrow M_e = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$M_e = b_{i-1} + \dfrac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ Per la 1a classe i per cui $F_i \geq 0,5$
Quartile 1	Q_1	Primo x_i per cui $F_i \geq 0,25$	$Q_1 = b_{i-1} + \dfrac{0,25 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ Per la 1a classe i per cui $F_i \geq 0,25$
Quartile 3	Q_3	Primo x_i per cui $F_i \geq 0,75$	$Q_3 = b_{i-1} + \dfrac{0,75 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ Per la 1a classe i per cui $F_i \geq 0,75$

- Calcolo della mediana nel caso di N valori singoli ordinati in maniera crescente:

$$M_e = \begin{cases} x_{(N+1)/2} & \text{se } N \text{ è dispari} \\ \frac{x_{N/2} + x_{N/2+1}}{2} & \text{se } N \text{ è pari} \end{cases}$$

- Media aritmetica ($\overline{x}$)

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_k \cdot x_k}{N} = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \cdots + f_k \cdot x_k$$

o in maniera algebrica: $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \sum f_i \cdot x_i$

Indici di dispersione

- Campo di variazione $= \begin{cases} \text{differenza tra il più grande e il più piccolo } x_i & \text{(discreta)} \\ \text{ampiezza totale } b_k - b_0 & \text{(continua)} \end{cases}$

- Scarto interquantile o semi-interquantile (Q)

$$Q = Q_3 - Q_1 \qquad \text{o} \qquad Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

- Varianza (σ^2) o deviazione standard (σ) di una serie raggruppata (x_i e f_i)

$$\sigma^2 = f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + f_k(x_k - \overline{x})^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

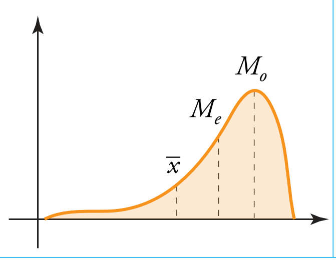
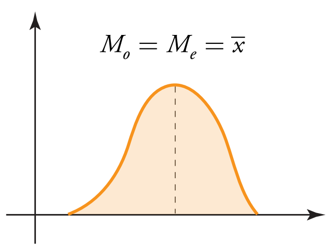
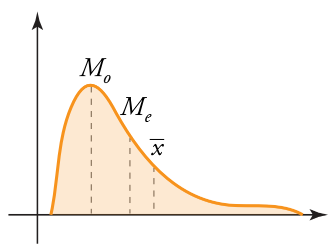
Formula di König: $\overline{x^2} = f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + \cdots + f_k \cdot x_k^2$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

- Coefficiente di variazione (CV)

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 \qquad (\text{CV} \geq 25\% \rightarrow \text{disperso})$$

Indici di asimmetria

<table>
<tr><th>Stiramento a sinistra</th><th>Simmetrico</th><th>Stiramento a destra</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

I momenti

- Momento centrale di ordine 3: $\mu_3 = f_1(x_1 - \overline{x})^3 + f_2(x_2 - \overline{x})^3 + \cdots + f_k(x_k - \overline{x})^3$

- Momento centrale di ordine 4: $\mu_4 = f_1(x_1 - \overline{x})^4 + f_2(x_2 - \overline{x})^4 + \cdots + f_k(x_k - \overline{x})^4$

Principali misure

- Coefficiente di Yule (C_Y)
  vspace-1em

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,M_e}{Q_3 - Q_1} \qquad \begin{cases} C_Y > 0 & \text{Stiramento a destra} \\ C_Y = 0 & \text{Simmetria} \\ C_Y < 0 & \text{Stiramento a sinistra} \end{cases}$$

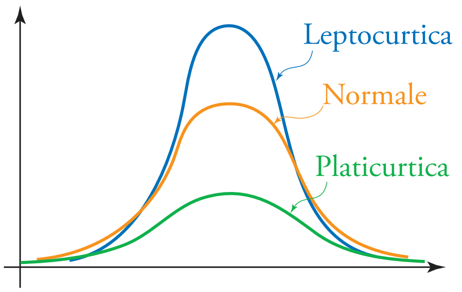
- Coefficiente di Pearson (β_1)

$$\beta_1 = 3\frac{(\overline{x} - M_e)}{\sigma} \qquad \begin{cases} \beta_1 \to 1 & \text{Stiramento a destra} \\ \beta_1 \to 0 & \text{Simmetria} \\ \beta_1 \to -1 & \text{Stiramento a sinistra} \end{cases}$$

- Coefficiente di Fisher (γ_1)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \begin{cases} \gamma_1 > 0 & \text{Stiramento a destra} \\ \gamma_1 = 0 & \text{Simmetria} \\ \gamma_1 < 0 & \text{Stiramento a sinistra} \end{cases}$$

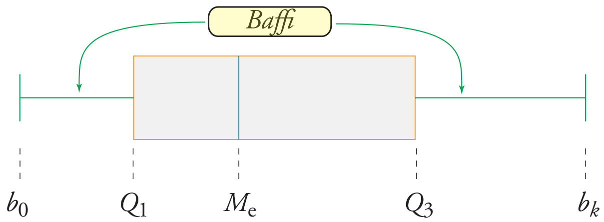
Misure d'appiattimento

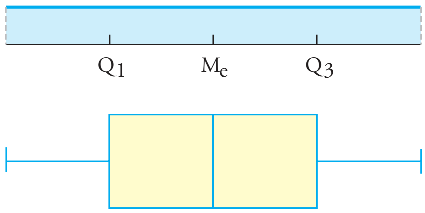


- Coefficiente di Pearson (β_2)

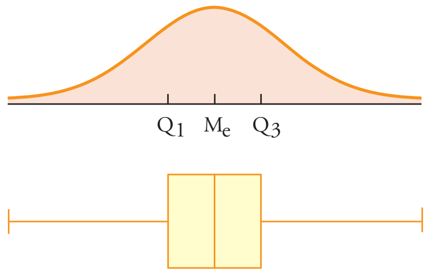
$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad \begin{cases} \beta_2 > 3 \Rightarrow \text{Leptocurtica} \\ \beta_2 = 3 \Rightarrow \text{Normale} \\ \beta_2 < 3 \Rightarrow \text{Platocurtica} \end{cases}$$

Box-plot

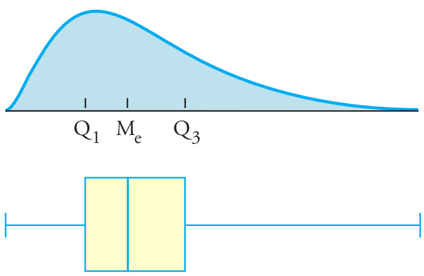




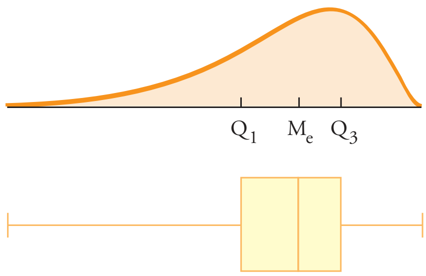
Uniforme



A forma di campana



Asimmetria a destra



Asimmetria a sinistra

Valori anomali (outliers)

Possibile modifica dei limiti b_0 e b_k con indicazione con un puntino dei valori della serie che escono da questo intervallo:

- $b_0' =$ Il più piccolo valore osservato della serie $\geq [Q_1 - 1,5 \times (Q_3 - Q_1)]$
- $b_k' =$ Il più grande valore osservato della serie $\leq [Q_3 + 1,5 \times (Q_3 - Q_1)]$

Probabilità e inferenza statistica

Probabilità

Nozioni di eventi e di probabilità

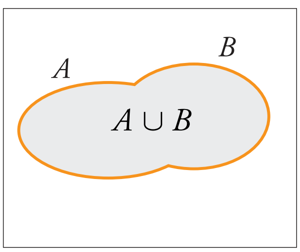
- U: universo (evento certo)
- $\varnothing$: evento impossibile
- $\overline{A}$: evento complementare a A
- $A \cup B$: A unione B (A ou B)
- $A \cap B$: A intersezione B (A et B)
- $P(A)$: probabilità dell'evento A

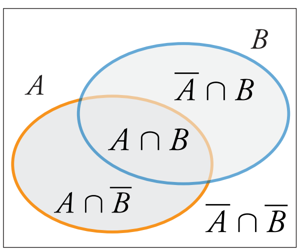
$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

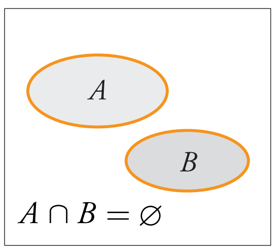
Se gli eventi sono ugualmente probabili

Proprietà

$P(U) = 1$	$P(\varnothing) = 0$	$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$	
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$		$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$	







Eventi incompatibili e indipendenti

- A e B sono incompatibili se : $A \cap B = \varnothing \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A e B sono indipendenti se : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Probabilità geometrica

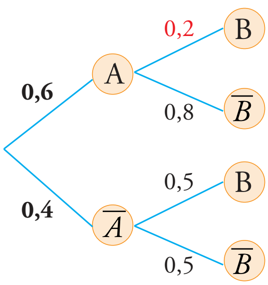
Oggetto a una dimensione		Oggetto a due dimensioni	
$P(A) = \dfrac{\text{Lunghezza di } A}{\text{Lunghezza di } S}$		$P(A) = \dfrac{\text{Area di } A}{\text{Area di } S}$	

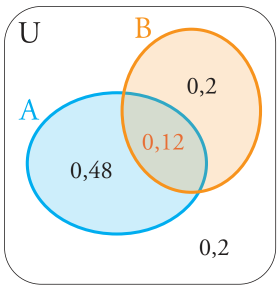
Probabilità condizionale

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \text{Probabilità che si verifichi } B \text{ sapendo che } A \text{ si è verificato.}$$

Schema classico del calcolo delle probabilità

Albero delle probabilità	Diagramma di Venn	Tabella di contingenza





	A	$\overline{A}$	Totale
B	0,12	0,2	0,32
$\overline{B}$	0,48	0,2	0,68
Totale	**0,6**	**0,4**	1

Probabilità associate:

- Probabilità a priori : $P(A) = 0,6$
- Probabilità composta : $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$
- Probabilità totale : $P(B) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,5 = 0,32$
- Probabilità condizionata : $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,6} = 0,2$
- Probabilità a posteriori: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$

Variabile aleatoria discreta

X assume differenti valori $x_1; x_2; \cdots x_n$ con la probabilità $p_1; p_2; \cdots p_n$ tale che

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1 \qquad \text{oppure} \qquad \sum p_i = 1$$

Indicatore	Notazione	Formula
Valore atteso	$E(X)$	$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n$
Valore atteso del quadrato	$E(X^2)$	$E(X^2) = p_1 \cdot x_1^2 + p_2 \cdot x_2^2 + \cdots + p_n \cdot x_n^2$
Varianza	$V(X)$	$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ König
Deviazione standard	$\sigma(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Funzione di ripartizione

$$F(X) = P(X \leq x_i)$$
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Inferenza statistica

Notazione

Popolazione		Campione	
Dimensione	N	Dimensione	n
Media	μ	Media	$\overline{x}$
Deviazione standard	σ	Deviazione standard	S
Proporzione	π	Proporzione	$f = n_i/n$

In inferenza statistica, quando lavoriamo su dei campioni, utilizziamo la **deviazione standard campionaria** S. Quest'ultima serve come **stimatore** della deviazione standard della popolazione. La deviazione standard campionaria si calcola come segue:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sigma \times \sqrt{\frac{n}{n-1}} \qquad \text{valore Sx sulle calcolatrici TI}$$

Intervalli di confidenza

Intervalli di confidenza per la media di una popolazione

1. La media della popolazione μ può essere stimata per mezzo della media del campione $\overline{x}$.
2. La deviazione standard della popolazione σ può essere stimata a partire dalla deviazione standard del campione S.

μ può dunque essere stimata e appartiene al seguente intervallo: $\overline{x} \pm$ Margine di errore

$$\mu \in \left[\overline{x} - z \times \frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{x} + z \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Il valore z si calcola come segue:

Niveau de confiance	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Condizione di utilizzo: $n \geq 30$

Intervallo di confidenza per una proporzione di una popolazione

Si sceglie con reimmissione un campione aleatorio e, in questo campione, si osservi una proporzione qualsiasi: $f = n_i/n$. Possiamo allora inferire che la proporzione π nell'intera popolazione sarà compresa nell'intervallo di confidenza seguente: $f \pm$ Margine di errore

$$\pi \in \left[f - z \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \quad ; \quad f + z \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Il valore z si calcola come segue:

Niveau de confiance	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Condizioni di utilizzo: $n \geq 30$ $\quad n \times f \geq 5$ $\quad n \times (1-f) \geq 5$

Intervalli di previsione e test statistici

Quando si lavora sui test statistici si parla di **rischio d'errore**:

$$\text{Rischio d'errore} = 1 - \text{Livello di confidenza}$$

Test di confronto di una media con un valore noto

In questo test, si vuole determinare se la media della popolazione prevista μ, è uguale o differente alla media calcolata sul campione $\overline{x}$.

1. Formulazione dell'ipotesi nulla H_0 e alternativa H_1.

$$\text{Ipotesi nulla: } H_0 : \quad \mu = \overline{x}$$
$$\text{Ipotesi alternativa: } H_1 : \quad \mu \neq \overline{x} \quad [\text{test bilaterale}]$$

2. Scelta del rischio d'errore e determinazione di z.

Rischio d'errore	1%	2%	5%	10%
z	2,58	2,33	1,96	1,64

3. Calcolo dell'intervallo di previsione:

$$\mu \pm z \times \frac{\sigma \text{ ou } S}{\sqrt{n}}$$

4. Accettazione di H_0 se $\overline{x} \in$ Intervallo di previsione

Condizione di utilizzo: $n \geq 30$

Test di confronto di una proporzione con un valore noto

In questo test, si vuole determinare se una proporzione prevista π è uguale o differente ad una proporzione f calcolata sul campione.

1. Formulazione dell'ipotesi nulla H_0 e di quella alternativa H_1:

$$\text{Ipotesi nulla: } H_0 : \quad \pi = f$$
$$\text{Ipotesi alternativa: } H_1 : \quad \pi \neq f \quad [\text{test bilaterale}]$$

2. Scelta del rischio d'errore e determinazione di z.

Rischio d'errore	1%	2%	5%	10%
z	2,58	2,33	1,96	1,64

3. Calcolo dell'intervallo di fluttuazione:

$$\pi \pm z \times \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

4. Accettazione di H_0 se $f \in$ Intervallo di fluttuazione

Condizioni di utilizzo: $n \geq 30 \qquad n \cdot \pi \geq 5 \qquad n \cdot (1-\pi) \geq 5$

Geometria

Trigonometria

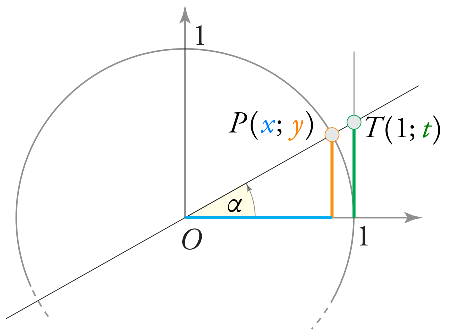
Conversione gradi-radianti

$$\frac{\text{Gradi}}{180} = \frac{\text{Radianti}}{\pi}$$

Alcuni angoli particolari

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	360°
Radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	2π

Cerchio trigonometrico



$$\sin(\alpha) = y$$

$$\cos(\alpha) = x$$

$$\tan(\alpha) = t$$

Relazioni trigonometriche

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

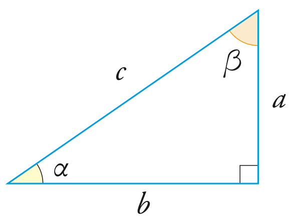
Valori esatti e angoli particolari

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Relazioni tra alcuni angoli

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	

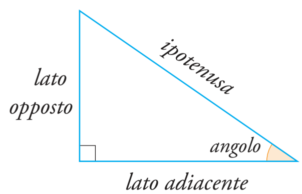
Trigonometria nel triangolo rettangolo



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Per ricordarsi facilmente queste tre formule, si possono utilizzare le seguenti espressioni mnemoniche: *sin-op-hyp cos-adj-hyp* e *tan-op-ad*.



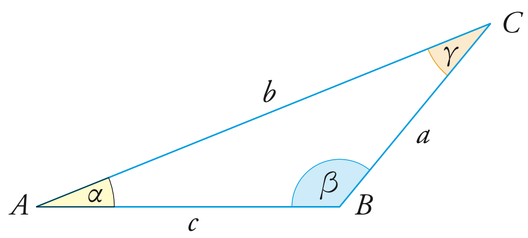
Trigonometria in un triangolo qualsiasi

Teorema del seno

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Teorema del coseno

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}}$$



Equazioni trigonometriche elementari

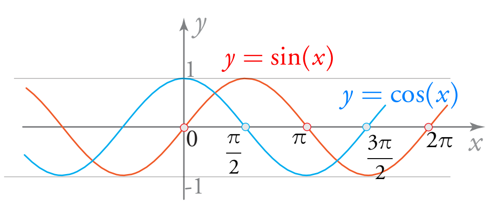
- $\cos(x) = a \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \\ x = -\cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad$ con $k \in \mathbb{Z}$

- $\sin(x) = a \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \\ x = \pi - \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad$ con $k \in \mathbb{Z}$

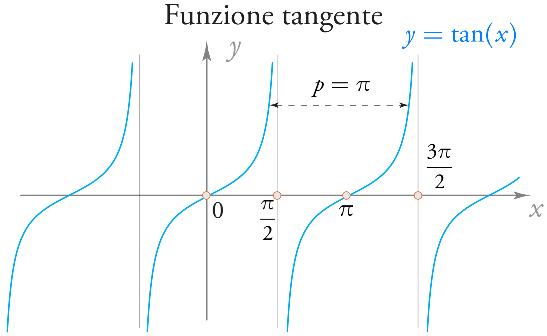
- $\tan(x) = a \quad \rightarrow \quad \{\ x = \tan^{-1}(a) + k \cdot \pi \qquad$ con $k \in \mathbb{Z}$

Funzioni trigonometriche fondamentali

Funzioni seno e coseno

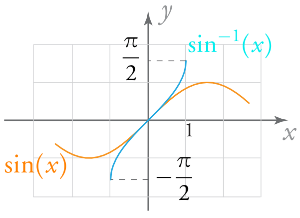


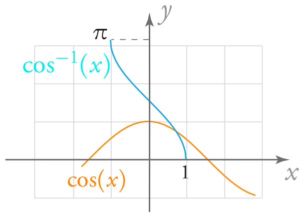
Funzione tangente

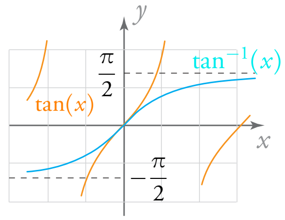


Funzioni trigonometriche inverse

Funzione trigonometrica	Dominio di definizione Valori per x	Insieme Valori per y
$\sin^{-1}(x)$	$[-1;1]$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1}(x)$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$
$\tan^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$



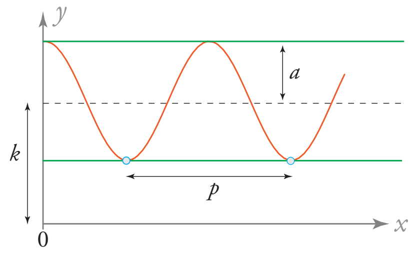




Funzioni sinusoidali

Forma generale: $y = a \cdot \cos(b(x-h)) + k$ o $y = a \cdot \sin(b(x-h)) + k$

- a = ampiezza della funzione (stiramento verticale)
- p = periodo della funzione
- b = stiramento orizzontale $\quad b = 2\pi/p$
- h = sfasamento (traslazione orizzontale)
- k = altezza dell'asse d'oscillazione (o traslazione verticale)



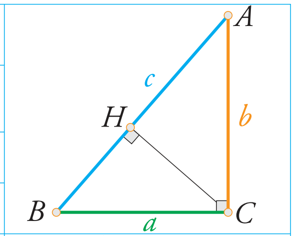
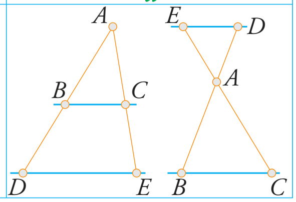
Coordinate polari

Siano r et φ le coordinate polari di un punto $P(x;y)$ nel piano.

Dalle polari alle cartesiane	Dalle cartesiane alle polari
$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \tan^{-1}(y/x) \pm 180\,°$

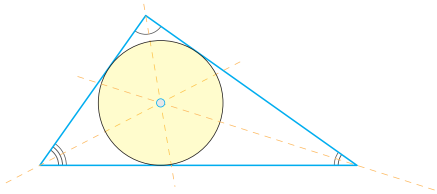
Geometria del piano

Relazioni metriche

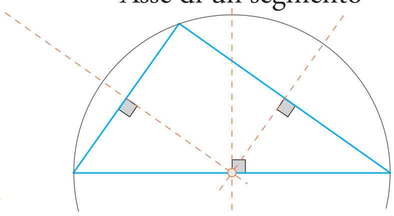
Teorema di Pitagora	$a^2 + b^2 = c^2$	
Teorema dell'altezza	$HC^2 = BH \cdot HA$	
Teorema di Euclide	$BC^2 = BH \cdot BA$	
	$AC^2 = AH \cdot AB$	
Teorema di Talete	$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$	

Rette particolari di un triangolo

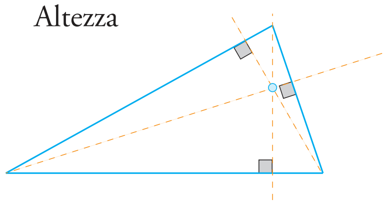
Bisettrice



Asse di un segmento

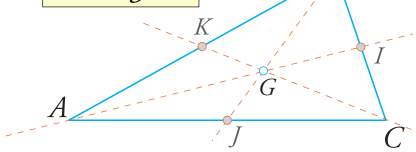


Altezza



Mediana

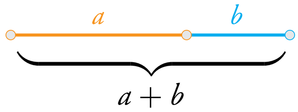
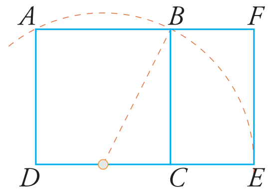
$$AG = \frac{2}{3} AI$$



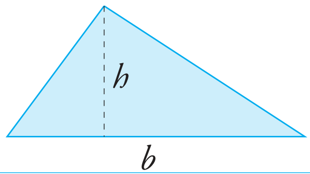
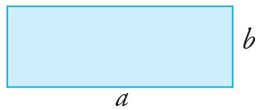
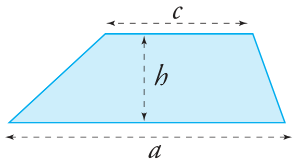
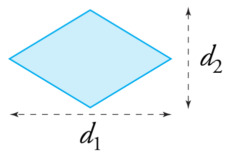
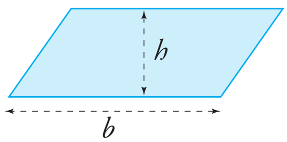
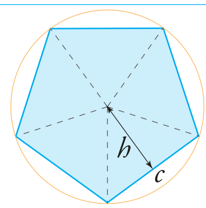
Somma di angoli e diagonali

- La somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°.
- La somma degli angoli interni di un poligono convesso a n lati vale $(n-2) \cdot 180°$.
- Il numero di diagonali di un poligono convesso a n lati vale $\frac{n(n-3)}{2}$.

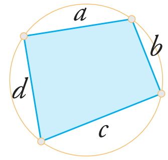
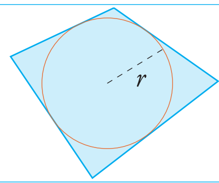
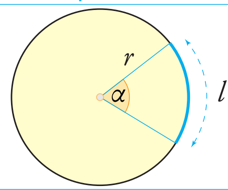
Sezione aurea e rettangolo aureo

Sezione aurea	Rettangolo aureo
	
$\boxed{\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}}$	$\boxed{\dfrac{AF}{FE} = \dfrac{BC}{CE} \simeq 1{,}618}$

Area di qualche figura elementare

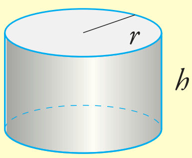
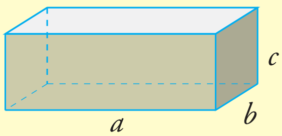
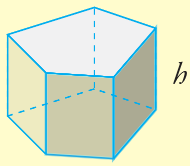
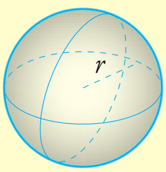
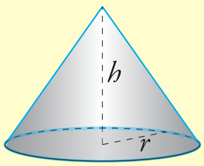
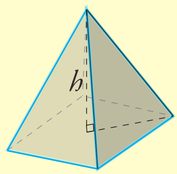
Triangolo	$\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2}$	
Rettangolo	$\mathscr{A} = a \cdot b$	
Trapezio	$\mathscr{A} = \dfrac{a+c}{2} \cdot h$	
Rombo	$\mathscr{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$	
Parallelogramma	$\mathscr{A} = b \cdot h$	
Poligono regolare a n lati	$\mathscr{A} = \dfrac{c \cdot h}{2} \cdot n$	

Area di qualche figura elementare (seguito...)

Quadrilatero inscritto	$p =$ semi-perimetro $\mathscr{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$	
Quadrilatero circoscritto	$p =$ semi-perimetro $\mathscr{A} = r \cdot p$	
Settore circolare	$l = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360}$ $\mathscr{A} = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$	

Geometria dello spazio

Volume di qualche solido elementare

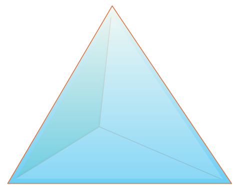
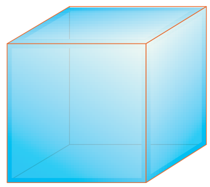
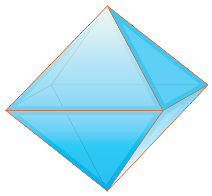
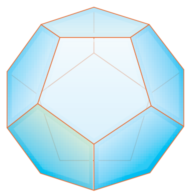
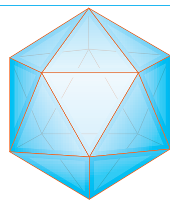
Cilindro	Parallelepipedo	Prisma
		
$\mathscr{V} = \pi r^2 h$	$\mathscr{V} = a \cdot b \cdot c$	$\mathscr{V} =$ Area di base $\cdot\, h$
Sfera	Cono	Piramide
		
$\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$	$\mathscr{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$	$\mathscr{V} = \dfrac{\text{Area di base} \cdot h}{3}$

Poliedri platonici

S : numero di spigoli
V : numero di vertici
F : numero di facce
c : lunghezza degli spigoli

$\mathscr{A}$: area delle facce
$\mathscr{V}$: volume

Formula di Eulero $V - S + F = 2$

Tetraedro	$V = 4$ $S = 6$ $F = 4$ $\mathscr{A} = \sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot c^3$	
Esaedro (cubo)	$V = 8$ $S = 12$ $F = 6$ $\mathscr{A} = 6c^2$ $\mathscr{V} = c^3$	
Ottaedro	$V = 6$ $S = 12$ $F = 8$ $\mathscr{A} = 2\sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot c^3$	
Dodecaedro	$V = 20$ $S = 30$ $F = 12$ $\mathscr{A} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \cdot c^3$	
Icosaedro	$V = 12$ $S = 30$ $F = 20$ $\mathscr{A} = 5\sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \cdot c^3$	

Geometria vettoriale nel piano

- Teorema di Chasles: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
- Vettori collineari: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ collineare a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$
- Coordinate del punto A: $\quad A(a_1; a_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Punto medio del segmento AB: $\quad M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
- Baricentro del triangolo ABC : $G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$
- Norma di un vettore: $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\alpha$
- Angolo tra due vettori: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$
- Vettori perpendicolari: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Rette

Coefficiente angolare di una retta con vettore direttore $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	$m = \dfrac{d_2}{d_1}$
Coefficiente angolare di una retta passante per $A(a_1 ; a_2)$ e $B(b_1 ; b_2)$	$m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$
Equazione di una retta con coefficiente angolare m passante per $(0,h)$	$y = mx + h$
Equazione parametrica di una retta passante per $A(a_1 ; a_2)$ e con vettore direttore $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$
Due rette con coefficienti angolari m_1 e m_2 sono perpendicolari se	$m_1 \cdot m_2 = -1$
Angolo acuto tra due rette con coefficienti angolari m_1 e m_2	$\tan(\alpha) = \left\lvert \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right\rvert$

Distanze

Distanza da $A(a_1 ; a_2)$ a $B(b_1 ; b_2)$	$\delta(A ; B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
Distanza di $P(p_1 ; p_2)$ dalla retta d di equazione $ax + by + c = 0$	$\delta(P ; d) = \dfrac{\lvert a p_1 + b p_2 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Geometria vettoriale nello spazio

- Coordinate del punto A: $A(a_1; a_2; a_3) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Punto medio del segmento AB: $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}; \dfrac{a_2+b_2}{2}; \dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$
- Baricentro del triangolo ABC: $G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}; \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}; \dfrac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$
- Norma di un vettore: $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\alpha$
- Angolo tra due vettori: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$
- Vettori perpendicolari: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

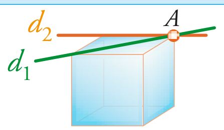
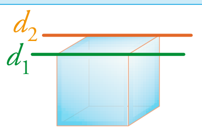
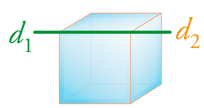
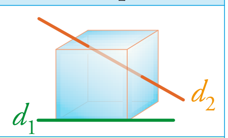
Retta e distanza

Si indica con d una retta passante per il punto $A(a_1; a_2; a_3)$ e con vettore direzionale $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Un punto $P(x; y; z)$ appartiene alla retta d se una delle seguenti condizioni è verificata:

Equazione vettoriale	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{d}$
Equazione parametrica	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$
Equazione cartesiana	$\dfrac{x-a_1}{d_1} = \dfrac{y-a_2}{d_2} = \dfrac{z-a_3}{d_3}$

Posizione relativa di due rette

Complanari: esiste un piano che contiene le due rette			Non complanari
			
$d_1 \cap d_2 = \{A\}$	$d_1 \cap d_2 = \varnothing$	$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$	$d_1 \cap d_2 = \varnothing$

Matematica economica

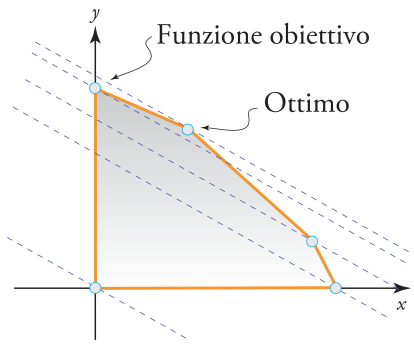
Programmazione lineare

- Obiettivo: Massimizzare o minimizzare una funzione $Z = a_1 x + b_1 y$ (funzione obiettivo) sotto diversi vincoli lineari della forma

$$ax + by \gtrless c \quad \text{o} \quad x \gtrless 0 \quad \text{o} \quad y \gtrless 0 \quad \text{etc...}$$

Procedura da seguire:

1) Rappresentare graficamente l'insieme dei vincoli => regione
2) Determinare tutti i vertici di tale regione (risoluzione di un sistema d'equazioni).
3) Calcolare il valore di Z per ogni vertice.
4) Scelere il o i vertici per cui il problema assume un valore di Z massimo o minimo.



Tasso di crescita

- Tasso di crescita globale i tra un valore iniziale V_0 e un valore finale V_t:

$$i = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

- Tasso di crescita annuale medio t_m su n anni:

$$t_m = \sqrt[n]{\frac{V_t}{V_0}} - 1$$

Matematica finanziaria

C_0 Capitale iniziale

C_n Capitale finale

i Tasso di interesse annuale

n Durata in anni

r Fattore di montante $(r = 1 + i)$

v Fattore di sconto $(v = 1/r)$

d Sconto di i $\left(d = \dfrac{i}{1+i}\right)$

Formule di capitalizzazione

Interesse semplice	Interesse composto
$C_n = C_0 \cdot (1 + ni)$	$C_n = C_0 \cdot r^n \quad \rightarrow \quad C_0 = C_n \cdot v^n$

Formule di conversione temporale

Per default l'unità dei tempi è l'anno. Se si desidera lavorare su una base mensile, l'unità dei tempi diventa il mese e l'interesse annuo i viene convertito in interesse mensile i_{12}.

... a interesse semplice	... a interesse composto
$i_{12} = i/12$	$i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$

- Il tasso semestrale i_2 o quello trimestrale i_4 si ottengono in modo analogo.

Formules di rendita unitarie a interesse composto

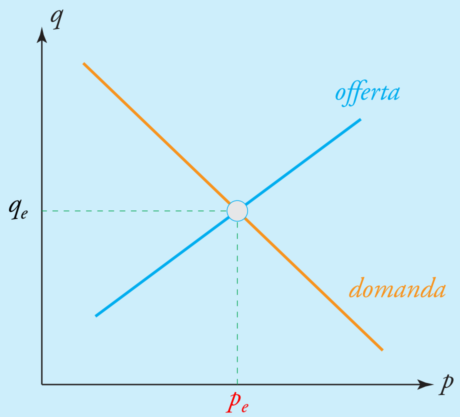
	Valore attuale	Valore finale
Praenumerando	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{1 - v^n}{d}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{r^n - 1}{d}$
Postnumerando	$a_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{1 - v^n}{i}$	$s_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{r^n - 1}{i}$

Valore finale V_n di una serie di pagamenti annuali praenumerando P per una durata di n anni al tasso annuo i.	$V_n = P \cdot \ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$
Mensilità M di un credito di valore V_0 rimborsabile in 60 mensilità pagabili postnumerando al tasso annuo i.	$V_0 = M \cdot a_{\overline{60}\rceil}$ con : $i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$
Mensilità M di un leasing di valore V_0 rimborsabile in 48 mensilità pagabili in anticipo al tasso annuale i con un valore residuo previsto pari a V_n	$V_0 = M \cdot \ddot{a}_{\overline{48}\rceil} + V_n \cdot v^{48}$ con : $i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$

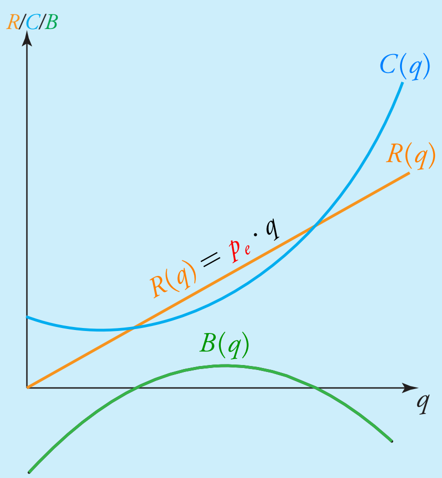
Formazione dei prezzi

<table>
<tr><th>Concorrenza perfetta</th><th>Monopolio</th></tr>
<tr><td>

Il prezzo d'equilibrio corrisponde al punto d'intersezione tra la domanda e l'offerta sul mercato.



Al prezzo d'equilibrio p_e, definito dal mercato, la domanda che ci si pone è: Quale quantità q bisogna produrre per massimizzare il profitto $B(q)$?



$$B(q) = R(q) - C(q)$$

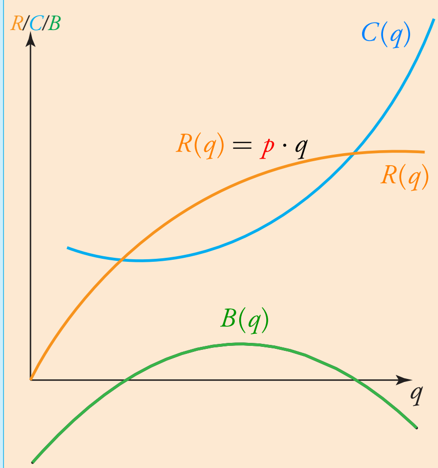
</td><td>

Il prezzo, invece di essere imposto, è una variabile che il monopolio deve determinare.

Il prezzo è legato alla domanda secondo una delle due seguenti relazioni:

$q = ap + b$ o $p = aq + b$

La domanda che ci si pone è: Quale quantità q bisogna produrre per massimizzare il profitto $B(q)$?



$$B(q) = R(q) - C(q)$$

Una volta che la quantità q è stata determinata, si cerca il prezzo p che permette di vendere questa quantità (prezzo ottimo).

</td></tr>
</table>